PART3　放物線の弦の中点の軌跡

3　放物線 $C : y=x^2$ と直線 $l : y=m(x+2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C と l が異なる2点A，Bで交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)のとき，線分ABの中点Pの軌跡を求めよ。

Point Pickup

(2)　放物線や円と傾き m の直線が異なる2交点をもつとき，m を定めることで，2交点の座標が決定し，それにより中点Pが決定する。ただし，必ずしも2交点の座標をそれぞれ m で表す必要はない。特に，放物線と直線の2交点，円と直線の2交点に関しては，2交点の x 座標を α，β とおき，解と係数の関係の利用を検討するとよい。

第 6 講　PART3　確認問題

1　放物線 $C:y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $l:y=mx-1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　放物線 C と直線 l が異なる２点 A，B で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

　　ア

(2)　(1)のとき，線分 AB の中点 P の軌跡を求めよ。

　　放物線 イ の ウ の部分

[ア の選択肢]

①　$m>2$　　②　$m>\sqrt{2}$

③　$m<-2,\ 2<m$　　④　$m<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<m$

⑤　$-2<m<2$　　⑥　$-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

[イ の選択肢]

①　$y=x^2$　　②　$y=x^2-1$

③　$y=\frac{1}{2}x^2$　　④　$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$

⑤　$y=2x^2$　　⑥　$y=2x^2-2$

[ウ の選択肢]

①　$x<-2,\ 2<x$　　②　$-2<x<2$

③　$x<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<x$　　④　$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

⑤　$x<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<x$　　⑥　$-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$

PART3　放物線の弦の中点の軌跡

3　放物線 $C: y=x^2$ と直線 $l: y=m(x+2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C と l が異なる2点A，Bで交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)のとき，線分ABの中点Pの軌跡を求めよ。

(1)　$y=x^2$ と $y=m(x+2)$ より

$$x^2=m(x+2)$$

$$x^2-mx-2m=0 \quad \cdots\cdots ①$$

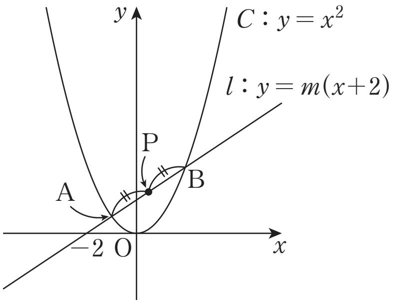
C と l が異なる2点で交わるのは，2次方程式①の判別式を D とすると $D>0$ のときである。

$$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot(-2m)=m(m+8)$$

より　$m(m+8)>0$

よって　$m<-8,\ 0<m$

(2)　(1)のとき，2点A，Bの x 座標をそれぞれ α，β とすると α，β は2次方程式①の異なる2解である。



よって，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=m$

線分ABの中点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

また，点Pは直線 l 上の点であるから　$y=m(x+2) \quad \cdots\cdots ③$

②から，$m=2x \quad \cdots\cdots ②'$

これを③に代入して

$$y=2x(x+2)=2x^2+4x$$

また，(1)より $m<-8,\ 0<m$ であるから，②′より

$2x<-8,\ 0<2x$　　すなわち　　$x<-4,\ 0<x$

したがって，求める軌跡は

放物線 $y=2x^2+4x$ の $x<-4,\ 0<x$ の部分

第 6 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：④，イ：②，ウ：③

[解説]

(1)　$y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=mx-1$ より

$$\frac{1}{2}x^2=mx-1$$

$$x^2-2mx+2=0 \cdots\cdots(*)$$

2 次方程式$(*)$の判別式を D とすると，C と l が異なる 2 点で交わるのは，$D>0$ のときである。

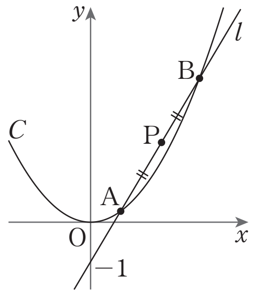
$$\frac{D}{4}=m^2-2$$

より　$m^2-2>0$

よって

$$\boldsymbol{m<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<m}$$

(2)　(1)のとき，2 点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とすると，α，β は 2 次方程式$(*)$の異なる 2 つの実数解である。 [A]



よって，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2m$ [B]

P$(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2m}{2}=m \cdots\cdots(**)$$ [C]

また，点 P は直線 l 上の点であるから

$$y=mx-1 \cdots\cdots(***)$$

$(**)$を$(***)$に代入して

$$y=x\cdot x-1=x^2-1$$

[A]　放物線と直線の 2 交点や，円と直線の 2 交点について考えるときは，2 交点の x 座標を α，β とおいて，解と係数の関係の利用を検討するとよい。

[B]　解と係数の関係
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

[C]　2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

ここで，(1)より，$m<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<m$ である

から，(＊＊)より

$x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x$

したがって，求める軌跡は

放物線 $y=x^2-1$ の

$x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x$ の部分